Exercices et problèmes

22 1. Déterminer les racines quatrièmes de l'unité.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^3+\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2+\left(\frac{z-i}{z+i}\right)+1=0.$$

23 Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation

$1+z+z^2+...+z^6=0$.

Calculer $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}$.

24 1. Montrer que pour tout entier $n>0$ et tout nombre complexe z,

$1-z^{n+1}=(1-z)\left(1+z+z^2+...+z^n\right)$.

2. Montrer que pour tout réel θ,

$1-e^{i\theta}=-2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$.

3. Soit un entier $n\geq 1$ et un réel $\theta\neq 2k\pi$, k un entier relatif.

On pose $S=1+\cos\theta+\cos 2\theta+...+\cos n\theta$ et $S'=\sin\theta+\sin 2\theta+...+\sin n\theta$.

a. Montrer que $S+iS'=\frac{1-e^{i\theta(n+1)}}{1-e^{i\theta}}$.

b. En déduire que $S=\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\cos n\frac{\theta}{2}$

et $S'=\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\sin n\frac{\theta}{2}$.

25 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère l'application f du plan dans lui même, qui à tout point d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que $z'=z^2-4z$. On désigne par A et B les points d'affixes respectives $1-i$ et $3+i$.

1. a. Calculer les affixes des points A' et B' images des points A et B par f.

b. On suppose que deux points ont la même image par f. Montrer qu'ils sont confondus ou que l'un est l'image de l'autre par une symétrie centrale que l'on précisera.

2. Soit I le point d'affixe -3.

a. Montrer que OMIM' est un parallélogramme, si et seulement si, $z^2-3z+3=0$.

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2-3z+3=0$.

3. a. Exprimer $(z'+4)$ en fonction de $(z-2)$.

En déduire une relation entre $|z'+4|$ et $|z-2|$ puis entre $\arg(z'+4)$ et $\arg(z-2)$.

b. On considère les points J et K d'affixes respectives 2 et -4.

Montrer que l'image de tout point M du cercle de centre J et de rayon 2 appartient à un même cercle que l'on déterminera.

c. Soit E le point d'affixe $z_E=-4-3i$.

Donner la forme trigonométrique de z_E+4 et montrer qu'il existe deux points dont l'image par f est le point E.

Préciser l'écriture algébrique de l'affixe de ces deux points.

26 Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives 2i, -1 et i.

On considère l'application f de $P\setminus\{A\}$ dans P qui, à tout point M de $P\setminus\{A\}$ d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que $z'=\frac{z+1}{z-2i}$.

1. a. On désigne par C', l'image de C par l'application f.

Quelle est la nature du quadrilatère ACBC' ?

b. Montrer que le point C admet un unique antécédent par l'application f que l'on notera C''. Quelle est la nature du triangle BCC'' ?

2. Donner une interprétation géométrique du module et d'un argument de z'.

3. a. Déterminer l'ensemble E des points M tels que z' soit un réel strictement négatif.

b. Déterminer l'ensemble F des points M tels que z' soit un nombre imaginaire non nul.

c. Déterminer l'ensemble G des points M tels que M' appartiennent au cercle de centre O et de rayon 1.

Qarray.tn - Agra Blech - Qarray.tn